Corrigé du TD1 - EL201

Sujet J.L. Imbert, rédigé par F. Moutier

6 octobre 2005

1 Exercice 1 : Redressement Simple Alternance

Rappel sur le développement en série de Fourier :

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)$$

1.1 Calcul de a_0

On calcule tout d'abord le terme a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} S_M \sin(wt)dt$$

$$a_0 = \frac{2S_M}{wT}\Big[-\cos(wt)\Big]_0^{T/2} = \frac{2S_M}{\pi}$$

avec $w = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$ et $T = 2\pi$

1.2 Calcul de termes a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(nwt)dt = \frac{2S_M}{T}\int_0^{T/2} \sin(wt)\cos(nwt)dt$$

Rappel de trigonométrie : $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

$$a_n = \frac{2S_M}{2T}\int_0^{T/2} \sin((1-n)wt) + \sin((1+n)wt)dt$$

$$a_n = \frac{S_M}{T}\left(\left[\frac{-\cos((1-n)wt)}{(1-n)w}\right]_0^{T/2} + \left[\frac{-\cos((1+n)wt)}{(1+n)w}\right]_0^{T/2}\right.$$

On obtient alors avec $T = 2\pi$:

$$a_n = \frac{S_M}{2\pi}\left(\frac{-\cos((1-n)\pi)}{(1-n)} + \frac{1}{(1-n)} - \frac{\cos((1+n)\pi)}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)}\right)$$

Pour n=1, on a $a_n = 0$. Pour n impair, on a toujours $a_n = 0$. Pour n pair, c'est à dire $n = 2p$:

$$a_{2p} = \frac{S_M}{2\pi}\left(\underbrace{\frac{-\cos((1-2p)\pi)}{(1-2p)}}_{\frac{1}{1-2p}} + \frac{1}{(1-2p)} - \underbrace{\frac{\cos((1+2p)\pi)}{(1+2p)}}_{\frac{1}{1+2p}} + \frac{1}{(1+2p)}\right)$$

$$a_{2p} = \frac{S_M}{2\pi}\left(\frac{2}{(1-2p)} + \frac{2}{(1+2p)}\right) = \frac{S_M}{2\pi}\left(\frac{4}{(1-4p^2)}\right) = \frac{2S_M}{\pi(1-4p^2)}$$

1.3 Calcul de termes b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(nwt)dt = \frac{2S_M}{T}\int_0^{T/2} \sin(wt)\sin(nwt)dt$$

Rappel de trigonométrie : $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$$b_n = \frac{2S_M}{2T}\int_0^{T/2} \cos((1-n)wt) - \cos((1+n)wt)dt$$

$$b_n = \frac{S_M}{T}\left(\left[\frac{\sin((1-n)wt)}{(1-n)w}\right]_0^{T/2} - \left[\frac{\sin((1+n)wt)}{(1+n)w}\right]_0^{T/2}\right.$$

On obtient alors avec $T = 2\pi$:

$$b_n = \frac{S_M}{2\pi}\left(\frac{\sin((1-n)\pi)}{(1-n)} + \frac{\sin(0)}{(1-n)} - \frac{\sin((1+n)\pi)}{(1+n)} + \frac{\sin(0)}{(1+n)}\right)$$

La seule valeur non nulle est obtenue pour n=1.
En effet, on sait que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

En fait, on a $\frac{\pi \sin x}{x}$ qui tend vers π quand x tend vers 0.
Pour n>1, les angles concernés sont des multiples de π pour lesquels les sinus sont nuls.
On a donc :

$$b_{n=1} = \frac{S_M}{2\pi}\left(\underbrace{\frac{\sin((1-n)\pi)}{(1-n)}}_{\pi} + \underbrace{\frac{\sin(0)}{(1-n)}}_{0} - \underbrace{\frac{\sin((1+n)\pi)}{(1+n)}}_{0} + \underbrace{\frac{\sin(0)}{(1+n)}}_{0}\right)$$

avec :

$$\lim_{n\to 1}\pi\frac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)\pi} = \pi$$

$$\lim_{n\to 1}0\frac{\sin(1-n)0}{(1-n)0} = 0$$

On peut ainsi écrire le développement en série de Fourier du signal $s(t)$:

$$s(t) = \frac{S_M}{\pi} + \frac{S_M}{2}\sin(wt) + \frac{2S_M}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pwt)}{1-4p^2}$$

2 Exercice 2 : Redressement Double Alternance

L'astuce dans cet exercice est d'utiliser le résultat de l'exercice précédent. Le nouveau signal v(t), ici présenté, est l'addition du signal s(t) précédent et de celui-ci décalé de T/2 : s(t-T/2).

$$v(t) = s(t) + s\Big(t - \frac{T}{2}\Big)$$

On sait qu'une translation dans le temps (ici de T/2) ne change pas le spectre en fréquence (même a_0, a_n, b_n), mais change le spectre de phase. Calculons $s_1(t) = s\Big(t - \frac{T}{2}\Big)$.

$$s_1(t) = \frac{S_M}{\pi} + \frac{S_M}{2}\sin\Big(w\Big(t - \frac{T}{2}\Big)\Big) + \frac{2S_M}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos\Big(2pw\Big(t - \frac{T}{2}\Big)\Big)}{1-4p^2}$$

$$s_1(t) = \frac{S_M}{\pi} + \frac{S_M}{2}\sin(wt - \pi) + \frac{2S_M}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pwt - 2p\pi)}{1-4p^2}$$

$$s_1(t) = \frac{S_M}{\pi} - \frac{S_M}{2}\sin(wt) + \frac{2S_M}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pwt)}{1-4p^2}$$

On obtient donc :

$$v(t) = s(t) + s_1(t) = \frac{2S_M}{\pi} + \frac{4S_M}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pwt)}{1-4p^2}$$

3 Exercice 3 : Signal Carré

On peut extraire la valeur moyenne du signal $s(t)$: $\frac{a_0}{2} = 0.5$
On peut donc écrire $s(t) = 0.5 + y_1(t)$ où $y_1(t)$.
Propriétés de $y_1(t)$:

- fonction impaire : donc développement en sinus uniquement (b_n)
- $y_1\Big(t + \frac{T}{2}\Big) = -y_1(t)$: soit uniquement des termes de rangs impairs.

Donc on a :

$$v(t) = 0.5 + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\sin((2n+1)wt) \qquad \text{avec} \quad w = \frac{2\pi}{T}$$

D'où,

$$b_{2n+1} = \frac{2}{T}\int_0^T y_1(t)\sin((2n+1)wt)dt$$

$$b_{2n+1} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin((2n+1)wt)dt$$

$$b_{2n+1} = \frac{2}{T}\left[\frac{-\cos((2n+1)wt)}{(2n+1)w}\right]_0^{T/2} dt$$

$$b_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos((2n+1)\pi)}{(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)}\right)$$

$$b_{2n+1} = \frac{2}{\pi(2n+1)}$$

On obtient donc :

$$v(t) = 0.5 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)wt)$$

4 Exercice 4 : Développement en série de sinus

Le signal f(x) est définit sur $[0;\pi]$ et on veut le développer en série de sinus. Il nous faut donc rendre la fonction impaire et la périodiser. La fonction g(x) obtenue par la symétrie centrale de f(x) par rapport au point $(0;0)$ est définit sur $]-\pi;\pi[$. On obtient $g(x) = ax$ avec $x \in]-\pi;\pi[$.

L'harmonique de rang n a pour expression :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\ \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax \sin(nx)dx$$

En intégrant par partie : $u = ax$, $du = a\ dx$ et $dv = \sin(nx)dx$, $v = \frac{-\cos(nx)}{n}$. On obtient ainsi :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-ax\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{a}{n\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx}_{=0}$$

$$b_n = \frac{-1}{\pi} \left(\frac{a\pi\ \cos(-n\pi))}{n} + \frac{a\pi\ \cos(n\pi))}{n} \right) = \frac{-2a}{n}(-1)^n$$

D'où l'expression de $g(x)$ sur $]-\pi;\pi[$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{-2a}{n})(-1)^n \sin(nx)$$

ou encore :

$$g(x) = 2a \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Si on développe le signal, on obtient :

$$g(x) = 2a \left(\sin x - \frac{sin(2x)}{2} + \frac{sin(3x)}{3} - ..... + ... - ..... + (-1)^{n+1} \frac{sin(nx)}{n} \right)$$

Si l'on veut la décomposition en une valeur particulière par exemple $\pi/4$, on prend $a = 1$ et $x = \pi/4$. On obtient donc :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - ... \qquad \text{(série de Leibnitz)}$$

5 Exercice 5 : Développement en série de cosinus

Pour obtenir une série de cosinus, on rend la fonction $f(x)$ paire en créant une fonction $g(x)$ par une symétrie axiale de $f(x)$. Ensuite on périodise $g(x)$. La fonction $g(x)$ étant paire, le développement ne comportera que des cosinus.

5.1 Calcul de la valeur moyenne de $g(x)$ sur une période

$$\left\langle g(x) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x)\ dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ax\ dx = \frac{a}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2}$$

5.2 Calcul des harmoniques en cosinus de rang (n>0)

Un harmonique de rang n a pour expression :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} ax\cos(nx)\,dx$$

Intégration par partie : $u = ax$, $du = a\,dx$ et $dv = \cos(nx)\,dx$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{ax\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{a}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) = \frac{-2a}{n\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{-2a}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right] = \frac{-2a}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Si n pair, on a $a_n = 0$. Si n impair, on $a_n = \frac{-4a}{\pi n^2}$.
Donc l'expression de $g(x)$ est :

$$g(x) = \frac{a\pi}{2} + \left(\frac{-4a}{\pi}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

6 Exercice 6 : Approximation du 1^{er} Harmonique

La tension v(t) appliquée au circuit est un signal sinusoïdal redressé double alternance, comme présenté dans l'exercice 2 avec $S_M = 325V$ et $T = 20ms$.

$$v(t) = \frac{2S_M}{\pi} + \frac{4S_M}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pwt)}{1-4p^2}$$

6.1 Calcul du courant moyen

La valeur moyenne du courant est donnée par :

$$I_0 = \frac{2S_M}{\pi}\frac{1}{R} = \frac{2\times 325}{10\times\pi} = 20.7A$$

6.2 Calculs sur les 3 premiers harmoniques

Pour chaque harmonique, on a $\underline{Z}_{2p} = R + jL2pw$
Le tableau ci-dessous résume les résultats des calculs.

p	$L2pw$	$\underline{Z}_{2p}$	$\widehat{V}_{2p}$ (V)	$\widehat{I}_{2p}(A)$
1	62.83	$63.6e^{j81^{\circ}}$	137.9	2.17
2	115.7	$126.1e^{j85^{\circ}}$	27.6	0.22
3	188.5	$188.8e^{j87^{\circ}}$	11.8	0.062

6.3 Conclusion

On remarque que les amplitudes des courants harmoniques diminuent trés rapidement. On peut donc approximer le courant au premier harmonique :

$$i(t) \approx I_0 + I_{2p,p=1}\cos(2wt - \varphi_{2p,p=1})$$

Note : Il peut subsister des fautes dans le corrigé, veuillez m'en faire part s'il vous plaît. Merci d'avance